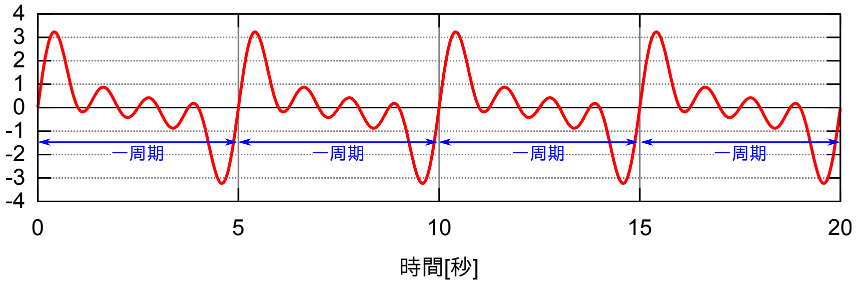
建築構造実験
2025/01/16
山村 一繁

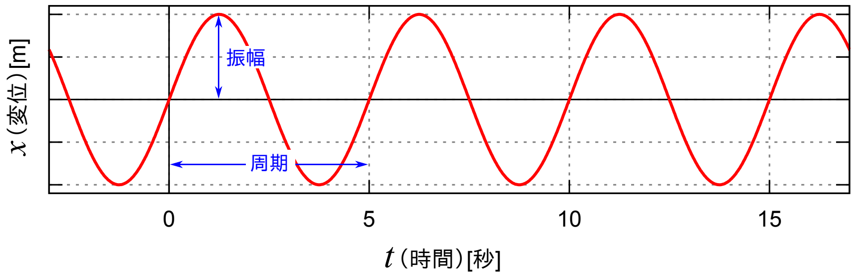
物には揺れ易い周期がある？！

■ 周期とは？

状態の変化が繰り返される時、変化の一回にかかる時間を周期と呼ぶ。



代表的なものとして、三角関数がある。



$$x(t) = A\sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \theta\right)$$

・A　：振幅（長さの単位、[m] など）
・T　：周期（時間の単位、[秒] など）
・θ　：位相または位相角（角度の単位、[rad]、無次元量）

周期 T[秒] と振動数 f[Hz]、円振動数 ω[rad/秒] には次の関係がある。

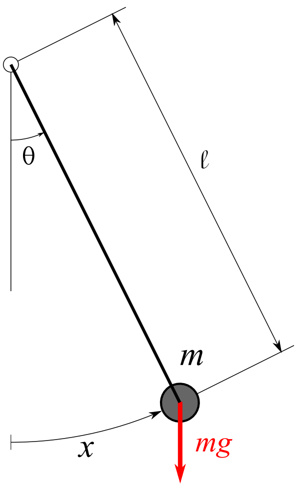
$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

すなわち、

$$x(t) = A\sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \theta\right) = A\sin(2\pi f t + \theta) = A\sin(\omega t + \theta)$$

■ 振り子

振り子には揺れ易い周期がある ⇒ 「固有周期」と呼ぶ。
固有周期は何によって決まるのか ⇒ 糸の長さ？おもりの重さ？



定式化

$$x = 2\ell\pi \times \frac{\theta}{2\pi} = \ell\theta$$

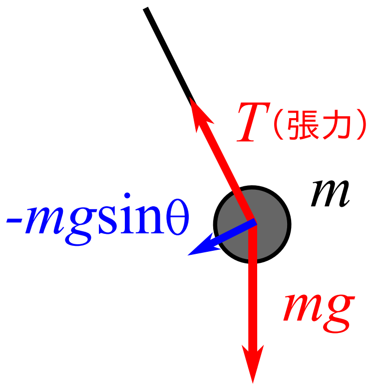
$$v = \ell\frac{d\theta}{dt}$$

$$a = \ell\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \cdots (a)$$

※ニュートンの第二法則

$$F = ma$$

図より、



$$F = -mg\sin\theta = ma$$

ただし、g は重力加速度である。ここで十分に小さい θ に対して、

$$\sin\theta \cong \theta$$

と近似できるので、

$$-mg\theta = ma$$

両辺を m で割り、左右を入れ換えれば、

$$a = -g\theta$$

式 (a) より、

$$\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\theta$$

この微分方程式を解くと、

$$\theta = A\cos(\omega t + \varphi)$$

が得られる。ここで、A と φ は初期条件によって決まる定数である。したがって、固有周期は次式となる。

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

【演習】

- python を使って計算してみる。
  注）python で円周率は「`pi`」で与えられる。「Python はじめのいーっぽ」を復習すること。
- 【問題 1】周期が 1 秒となる振り子の糸の長さとおもりの重さを求めよ。
- 【問題 2】周期が 2 秒となる振り子の糸の長さとおもりの重さを求めよ。
- 【問題 3】問題 1 と問題 2 の結果を比較せよ。

★ 周期を計算する時は、単位に注意すること。cm と m が混在してはならない。

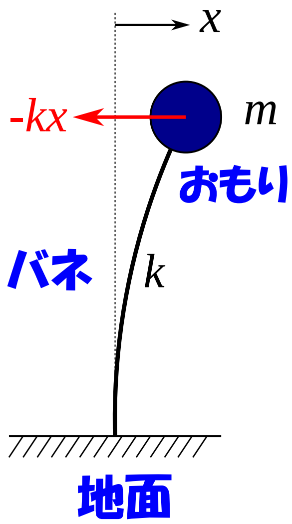
【実験】

- たこ糸とおもりを使って振り子を作る。
- 安定して振動させるためには、支点をどのようにするべきか？
- 周期はどのように測定すれば正確な値が得られるか？
- 周期は計算どおりとなるか？
- おもりの重さを変えるとどうなるか？
- 固有周期以外で大きく揺ることができるか？

■ **建物の固有周期**

次に建物がどのように揺れるかを考える。何らかのモデルを考え、数式で表わす必要がある。建物の場合は最も単純なモデルとして、ひとつのおもり、一本のバネからなる倒立振子を考える。

★ **非減衰自由振動**



※ニュートンの第二法則

$$F = ma$$

図より、

$$F = -kx = ma$$

$$-kx = ma$$

$$ma + kx = 0$$

$$a + \frac{k}{m}x = 0$$

ここで、

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

とおけば、

$$a + \omega^2 x = 0$$

すなわち、

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad \cdots (b)$$

この微分方程式を解くと、

$$x(t) = A\cos(\omega t - \theta)$$

が得られる。ここで、A と θ は初期条件によって決まる定数である。

ω を固有円振動数と呼ぶ。固有振動数 f および固有周期 T との関係は、

$$\omega = 2\pi f, \qquad f = \frac{1}{T}$$

なので、

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

となる。すなわち、固有周期は質量とバネ定数（剛性）の比で決まることがわかる。

【注】式の変形の途中で $\omega^2 = \frac{k}{m}$ と置くことに不自然さ、不満を感じる受講生も居ると思う。その場合は式 (b) を

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

としたままで微分方程式を解けば、

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \theta\right)$$

が得られる。この三角関数の固有円振動数は $\sqrt{\frac{k}{m}}$ であり、固有周期 T および固有振動数 f との関係は上記と同様である。

★ 微分方程式の解法（柴田明徳「最新耐震構造解析」より）

式 (b) の解は二つの未定係数 a、b を含んで次のように与えられる。

$$x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t \quad \cdots \text{(b)}'$$

両辺を t で微分すると、

$$\dot{x}(t) = -a\omega\sin\omega t + b\omega\cos\omega t$$

さらに t で微分すると、

$$\ddot{x}(t) = -a\omega^2\cos\omega t - b\omega^2\sin\omega t$$

上式と式 (b)′ を式 (b) に代入すれば、

$$-a\omega^2\cos\omega t - b\omega^2\sin\omega t + \omega^2(a\cos\omega t + b\sin\omega t) = 0$$

となり、式 (b)′ が解であることが分る。

a、b の値は初期条件から定まる。$t = 0$ における初期変位を d_0、初期速度を v_0 とすれば、

$$x(t=0) = a = d_0$$
$$\dot{x}(t=0) = b\omega = v_0$$

よって、

$$x(t) = d_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

あるいは、

$$x(t) = A\cos(\omega t - \theta)$$

ここに、$A = \sqrt{d_0^2 + (v_0/\omega)^2}$、$\theta = \tan^{-1}(v_0/\omega d_0)$ である。

◎三角関数の合成

$$\begin{aligned} x(t) &= a\cos\omega t + b\sin\omega t \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\omega t + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\omega t\right) \end{aligned}$$

ここで、$\cos\omega t$ と $\sin\omega t$ の係数をそれぞれ二乗して足し合せると、

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$$

となるので、

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\theta, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\theta \qquad (\because \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1)$$

とおくことができ、

$$x(t) = \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\theta\cos\omega t + \sin\theta\sin\omega t) = \sqrt{a^2+b^2}\left\{\cos(-\theta)\cos\omega t - \sin(-\theta)\sin\omega t\right\} = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\omega t - \theta)$$

また、

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}} = \frac{b}{a} \qquad \therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

となる。

■ 地震が終るとなぜ建物は静止するのか？

前節の定式化では、建物に力（地震力）を加えると、永久に揺れ続けることになってしまう。しかし、現実には地震動がおさまれば、建物は静止する。これは、なんらかの揺れを止める効果が存在することを示している。この効果は、建物内部での部材の摩擦や地面への振動エネルギーの拡散に起因するものと考えられており、以下の様なモデル化がなされる。

★ 減衰自由振動

速度に比例して揺れを抑える効果を考える。比例定数を c とすれば、

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0$$

ここで、

$$2h\omega = \frac{c}{m}$$

とおき、両辺を m で割れば、

$$\ddot{x}(t) + 2h\omega\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad \cdots (c)$$

となる。$h < 1$ の条件のもと微分方程式を解くと、

$$x(t) = A\,e^{-h\omega t}\cos\left(\sqrt{1-h^2}\,\omega t - \theta\right)$$

が得られる。ここで、A と θ は初期条件によって決まる定数である。h を減衰定数と呼び、固有周期（減衰固有周期 T'）は、

$$T' = \frac{2\pi}{\sqrt{1-h^2}\,\omega}$$

となる。

上式より、減衰を考慮すると固有周期が大きく（長く）なることがわかる。ただし通常 $h \ll 1$（h は 1 よりも十分小）なので実際の値としてはほとんど同じものとなる。

【注】このような減衰の表現はあくまでモデル化における仮定にすぎない。現実の減衰現象をモデルに組込む方法は未だ明らかにはなっていない。

★ 減衰定数の計算方法・・・（計測された）自由振動波形から減衰定数を求める

◎振幅比 d

$$d = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \cdots = \frac{x_1 + x_1'}{x_2 + x_2'} = \frac{x_2 + x_2'}{x_3 + x_3'} = \cdots$$

$x_1 = Ae^{-h\omega t_1}, \quad x_2 = Ae^{-h\omega t_2}$ より、

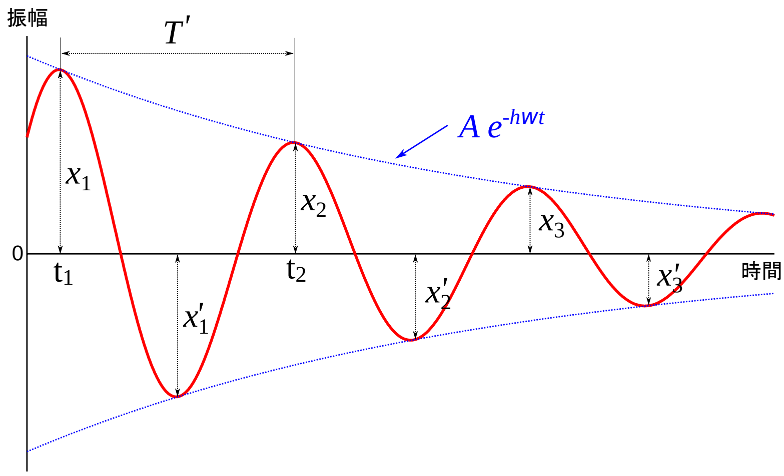
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{Ae^{-h\omega t_1}}{Ae^{-h\omega t_2}} = e^{-h\omega(t_2 - t_1)} = e^{-h\omega T'}$$

$$= e^{2\pi h/\sqrt{1-h^2}} = d$$

◎対数減衰率 $\ln d$

$$\ln d = \frac{2\pi h}{\sqrt{1-h^2}}$$

$$\therefore h = \frac{\dfrac{\ln d}{2\pi}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\ln d}{2\pi}\right)^2}}$$



ただし、ln は自然対数（ネイピア数 e を底とする対数）である。

★ 微分方程式の解法【その 2】（柴田明徳「最新耐震構造解析」より）

式 (c) の解を、

$$x(t) = Ae^{\lambda t}$$

とおき、両辺を t で微分すると、

$$\dot{x}(t) = \lambda A e^{\lambda t}$$

もう一度 t で微分すれば、

$$\ddot{x}(t) = \lambda^2 A e^{\lambda t}$$

これらを式 (c) に代入すれば、

$$\lambda^2 A e^{\lambda t} + 2h\omega\lambda A e^{\lambda t} + \omega^2 A e^{\lambda t} = 0$$

となり、両辺を $Ae^{\lambda t}$ で割れば、

$$\lambda^2 + 2h\omega\lambda + \omega^2 = 0$$

が得られる。この式を λ に関する二次方程式と考え、解を求めると、

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{matrix}\right\} = -h\omega \pm \sqrt{h^2 - 1}\,\omega = -h\omega \pm \sqrt{1 - h^2}\,\omega \cdot i$$

$e^{\lambda_1 t}$、$e^{\lambda_2 t}$ は二つの独立な基本解であり、これらの線形結合 $Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$ は (c) 式の一般解となる。$h < 1$ の時、λ は負の実部をもつ共役複素数となり、解は減衰振動を表す。

$$x(t) = e^{-h\omega t}\left(A\,e^{i\sqrt{1-h^2}\,\omega t} + B\,e^{-i\sqrt{1-h^2}\,\omega t}\right)$$

A、B は複素の未定係数であるが、x が実数解であることから、A、B は共役複素数でなければならない ($\because$ $e^{i\sqrt{1-h^2}\,\omega t}$ と $e^{-i\sqrt{1-h^2}\,\omega t}$ は共役)。

いま、$A = (a - bi)/2$ および $B = (a + bi)/2$ とおき、オイラーの公式、

$$e^{\pm it} = \cos t \pm i \sin t$$

を考慮すれば、次のような実数表現が得られる。

$$x(t) = e^{-h\omega t}\left(a\cos\sqrt{1-h^2}\,\omega t + b\sin\sqrt{1-h^2}\,\omega t\right)$$

振動実験

■ **目的**　振動模型を作成し静的加力試験および自由振動試験を行なうことで、建物の基礎的な振動特性について考察する。

■ **使用材料・機材**

(a) 振動模型	鋼材部品一式（部品図参照）	密度：$\rho = 7.8 \times 10^3$kg/m^3
	バネ用プラスチック板	板厚：$D = 2$ または 3mm、幅：$b \leqq 24$mm
		密度：$\rho = 1.27 \times 10^3$kg/m^3
		ヤング率：$E = 0.5$〜2.0 GPa (=GN/m^2) 程度
(b) バネ秤	静的加力用（1 kg、2 kg および 5 kg まで計測できるもの）	
(c) 非接触型変位計測器	レーザ変位計（測定範囲：±250 mm、精度：0.001 mm）	
(d) データレコーダ	携帯用振動計。波形の表示にも兼用する。	
(e) 工具	スパナなど	

■ **設計**　上記の材料（おもりとプラスチック板）を使って模型を作成する。したがって、おもり（部品図参照）の質量とプラスチック板の形状（厚さ、幅、長さ）を設定する必要がある。

考慮すべき条件

1. 固有振動数が計測しやすい範囲であること。（3 Hz〜10 Hz 程度）
   → 固有振動数の計算方法は「計算のヒント」を参照。
2. バネ定数が変位計とバネ秤で計測できる範囲にあること。
3. バネ 1 種以上、質量 2 種以上、計 2 ケース以上について実験を実施すること。

注 1：バネが長過ぎると模型を立てたときに不安定になる。上記の振動数の範囲を遵守し、2mm のプラスチック板の長さは 200mm 程度までとすること。
注 2：計算に当っては有効数字を考えること。過剰な精度は必要ないばかりでなく誤りである。なお、有効数字の理論的背景の知識は要求しない。

■ **実験の内容**

1. **静的加力**：バネ秤を使って模型の上端を引っ張り、適当な力を加えた時の変形量をレーザ変位計で測定する。この結果から、模型のバネ定数（剛性）が評価できる。
   注：測定においては様々な要因で誤差が生ずる。静的加力では安定して引っ張ることができるか？数値の読み取りが正確か？といったような問題がある。さらに、測定範囲で弾性である（力と変形が線型である）かどうかの保証もない。このような条件下で、できるだけ正確にばね定数が測定できるように工夫せよ。
2. **自由振動**：模型の上端に適当な変形を与え、手を離して自由振動させる。その変形量をレーザ変位計で測定し、データレコーダで記録する。この結果から、固有振動数および減衰定数などが評価できる。

■ **作業内容**

1. プラスチック板を切り出す。
2. 模型を組み立てる。
3. 台として用いる鉄骨に模型を固定する。
   - 万力を使う。
   - レーザの照射方向を考えて固定すること。
4. レーザ変位計を設置する。
5. 静的加力試験
   - ばねばかりで模型を引っ張る。
   - 変位はレーザ変位計のパネルに表示される。

   ※ レーザ変位計は高精度で変位を測定できるので、模型を人力で引っ張るとパネルに表示される数値は安定しないことに注意。
6. 自由振動試験
   - 模型に変位を与える。（手で引っ張って離す。）
   - 変位の時刻歴はデータレコーダに保存される。
   - 時刻歴データは後日 web で公開。

■ **まとめ方**　実験目的・方法を整理し、計算結果および実験結果を示すこと。可能であれば計算による予測値との対応を考察すること。特に、「固有振動数（設計・実験）」、「減衰定数（実験）」、「バネ定数（設計・実験）」については、各ケースに対し一覧表にして整理すること。

資料をそのまま写すのではなく必要な部分を簡潔にまとめること。量が多いからといって高評価となるわけではない。

注：考察・整理はすべての実験に対して行なうことが望ましい。自由振動の実験については最低でも 1 ケースについては行なうこと。

■ 計算のヒント

☆ 模型の固有振動数を求めるにはどうすればよいか？

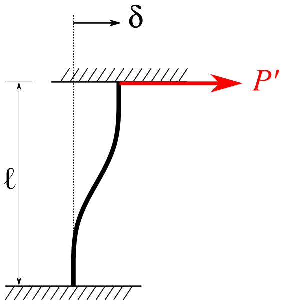
- 固有振動数 f：

  $2\pi f = \sqrt{\dfrac{K}{m}}$　　$\cdots$ 模型のバネ定数（剛性）K、質量 m

- 質量 m：体積を計算して、密度を掛ける。
- 模型のバネ定数 (剛性）K：単位の変形を与える力のこと

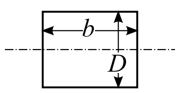
  $K = \dfrac{P}{\delta}$　　$\cdots$ 模型に加える力 P、模型の変形 δ

- 模型のバネを固定する治具は鋼製なので、バネの端部は固定（回転角は 0）とみなしてよい。
- 両端固定柱の先端集中荷重 P' に対するたわみ（変形）δ：



$$\delta = \frac{P'\ell^3}{12EI}$$　　$\cdots$ ヤング率 E、断面二次モーメント I

- 断面二次モーメント I：

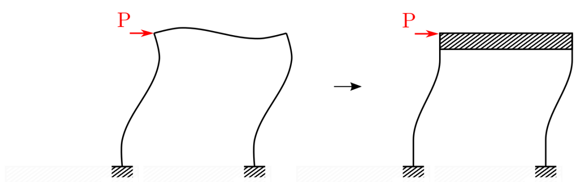


$$I = \frac{b\,D^3}{12}$$

- ***P* と *P′* との関係は？**

★ 門型フレームの変形

模型のような門型フレームに集中荷重を加えた場合の変形は、柱と梁それぞれの「断面」、「ヤング率」、「長さ」から総合的に計算することができる。ただし、梁が変形しないと仮定できる場合（たとえば、梁の「断面」と「ヤング率」の積が柱の「断面」と「ヤング率」の積より十分に大きく、「長さ」が同程度の場合）には、**柱 2 本**による変形に等しいと考えてよい。

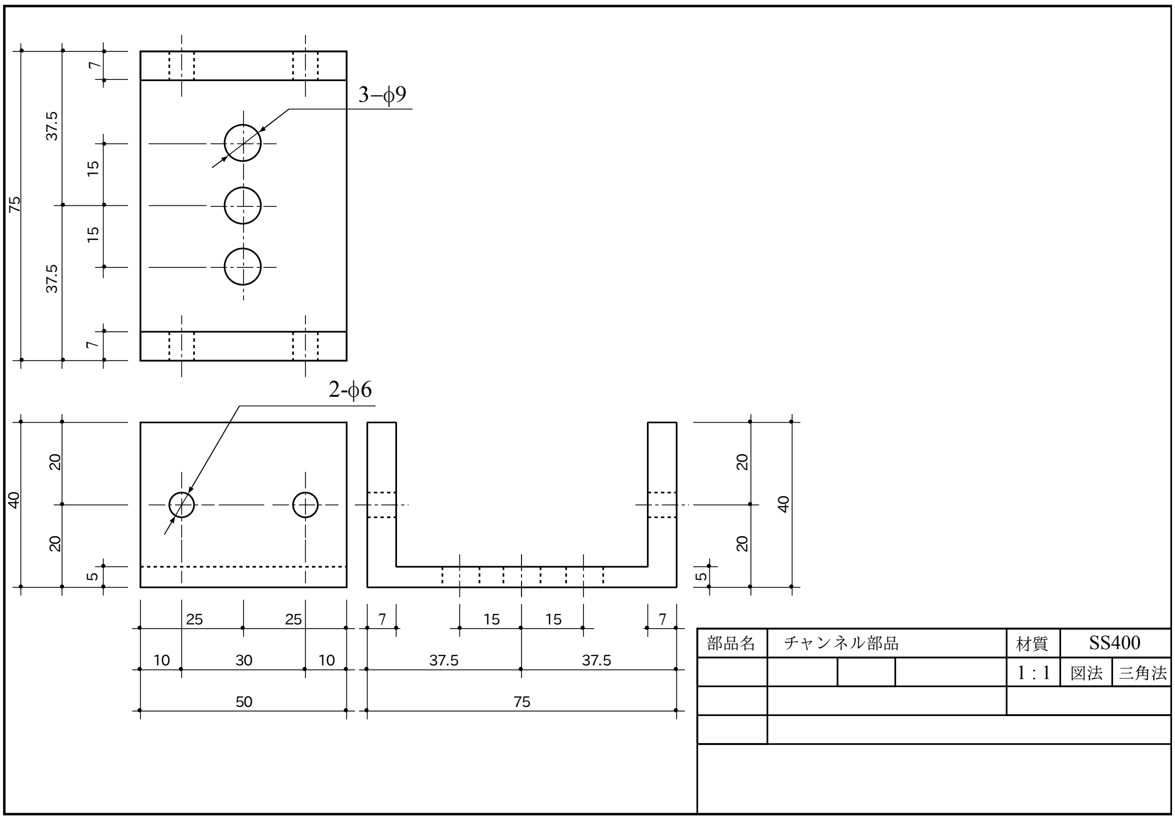


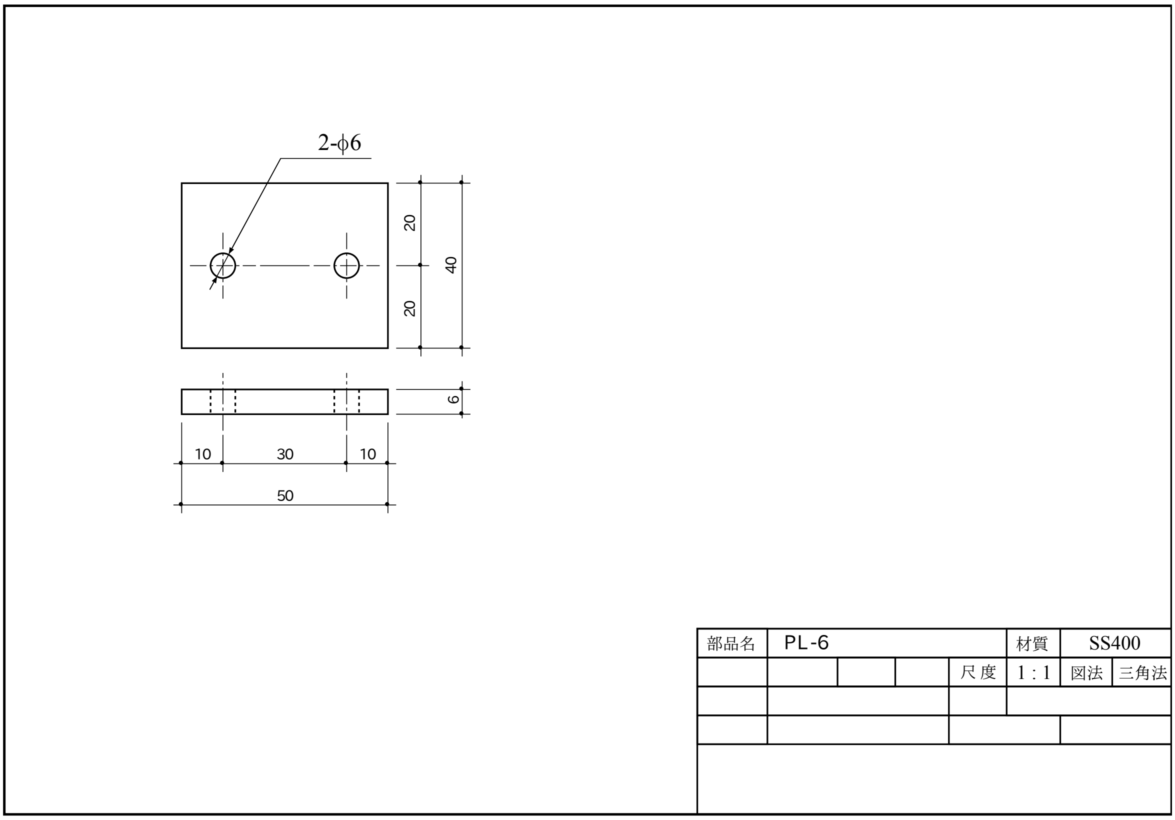
※ 参考資料：柴田明徳、最新耐震構造解析、森北出版

1・2 非減衰自由振動〈例 1・2〉両端固定梁（第 2 版 p.7）および〈例 1・3〉1 層ラーメン（第 2 版 p.8）

◎ 計算する時には単位に注意すること！原則として、N、kg、m、s のみを使い、SI 接頭辞のギガ (G)、ミリ (m) などは 10^n で表わすとよい。

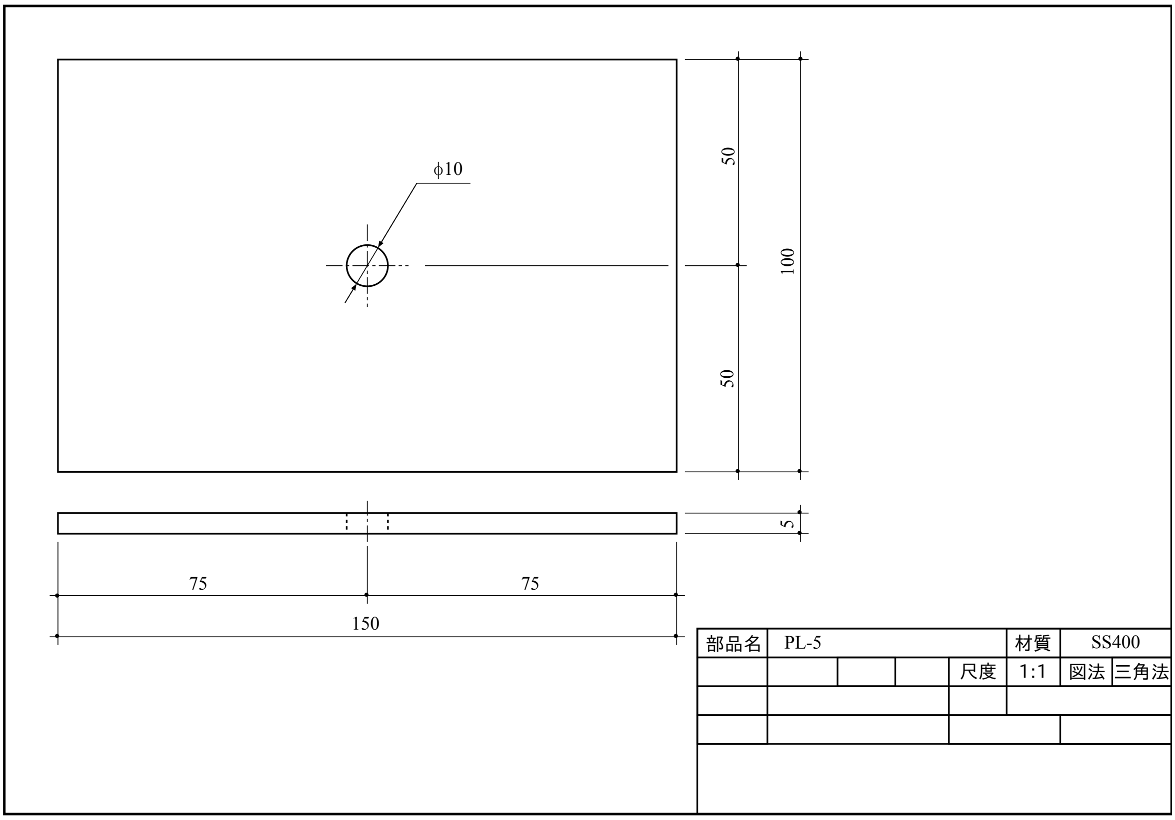
■ 部品図

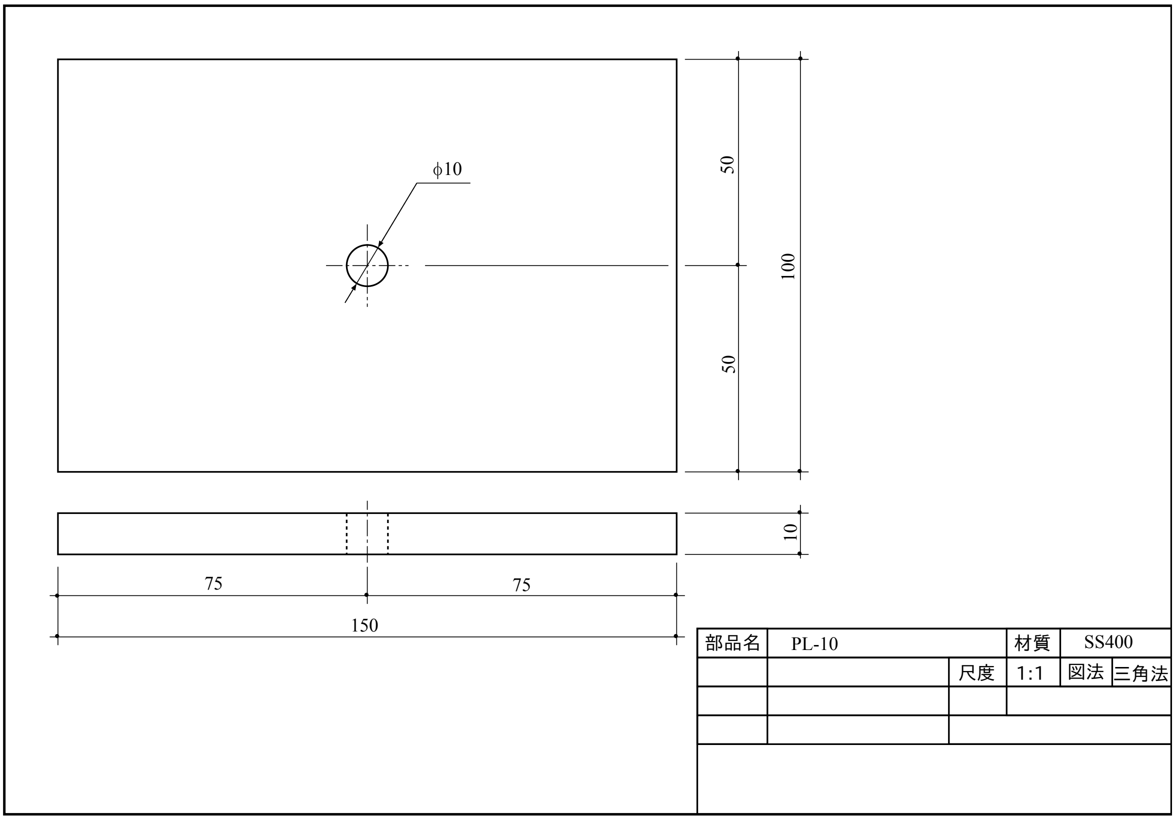




注１：数値の単位は mm。

注２：図中「3 – ϕ9」は、直径 9mm の穴が 3 つあることを表わす。





★各班にチャンネル部品 2 つ、PL-6（プラスチック板固定用部品）4 枚、および必要数の PL-5（おもり）・PL-10（おもり）・ボルト・ナット・ワッシャを配布する。
★固定用のボルトはナットおよびワッシャ込で一本あたり、M5×30mm（プラスチック板固定用）は 6.5g、M8×20mm（おもり固定用）は 19.5g、M8×40mm（おもり固定用）は 26g としてよい。